第28卷 第1期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 1
2011年02月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Feb. 2011

文章编号:1005-3085(2011)01-0096-05

四元数Wishart矩阵分布及其在通信中的应用*

李 斐[1]， 薛以锋[2]

(1- 烟台大学数学与信息科学学院，烟台 264005； 2- 华东师范大学数学系，上海 200241)

摘 要: 利用奇异的四元数Wishart矩阵的密度函数以及特征值的联合密度函数计算出了四元数随机MIMO信道模型的信道容量．此模型包括信道系数矩阵$H_{n_r\times n_t}$，它可分为$n_t\leqslant n_r$和$n_t>n_r$这两种情况．文中对这两种情形分别计算了部分数据．

关键词: 四元数随机MIMO信道；信道容量；奇异四元数Wishart分布

分类号: **AMS**(2000) 94A15; 94A05; 60E05; 62H10 **中图分类号**: O212.2.4 **文献标识码**: A

1 引言

关于实数随机矩阵的多元统计在文献[1]中已有详细而系统的研究．在对复数随机矩阵的研究中，Ratnarajah[2]，Vaillancourt[3]对复Wishart随机矩阵(奇异和非奇异)、复正态随机矩阵的密度函数和复Wishart随机矩阵特征值的联合分布密度函数做了一定的研究，并在文献[2]中给出了复随机矩阵在信息理论中的重要应用：MIMO Rayleigh衰减信道的容量计算．文献[4-8]在四元数随机矩阵的研究基础上，建立了四元数的随机MIMO信道模型，并求出了该信道模型的容量．以下是要用到的文献[5,7]中关于四元数随机矩阵结论．

设四元数随机矩阵$Y\sim\mathbb{Q}N_{n\times m}(\mu,I_n\otimes\Sigma)$(即$Y$服从四元数的正态分布)，其密度函数为

$$\frac{2^{2mn}}{\pi^{2mn}|\Sigma|^{2n}}\exp\big(\mathrm{Retr}(-2\Sigma^{-1}(Y-M)^H(Y-M))\big).$$

四元数随机矩阵$W=Y^HY\sim\mathbb{Q}W_m(n,\Sigma)\,(n\geqslant m)$，即$W$满足四元数的中心非奇异Wishart分布，则它的密度函数为

$$\frac{2^{2mn}}{\mathbb{Q}\Gamma_m(2n)|\Sigma|^{2n}}\exp\big(\mathrm{Retr}(-2\Sigma^{-1}W)\big)|W|^{2n-2m+1},$$

其中Retr(·)表示取迹的实部，另外

$$\mathbb{Q}\Gamma_n(\alpha)=\pi^{n(n-1)}\prod_{j=1}^{n}\Gamma[\alpha-2(j-1)],\quad \Re(\alpha)>2(n-1)$$

表示四元数矩阵的Γ函数．文献[7]还给出了W的特征值的联合分布如下

$$\frac{2^{2mn}\pi^{2m^2-2m}}{\mathbb{Q}\Gamma_m(2m)\mathbb{Q}\Gamma_m(2n)|\Sigma|^{2n}}{}_0F_0(-2\Sigma^{-1},D)|D|^{2n-2m+1}\prod_{i<j}^{m}(\lambda_i-\lambda_j)^4(\mathrm{d}D),$$

收稿日期: 2008-05-26. **作者简介**: 李斐(1982年10月生)，女，博士，讲师．研究方向：多元分析．
***基金项目**: 国家自然科学基金(10771069)；上海市重点学科建设项目(B407).

其中 ${}_0F_0(\cdot)$ 是四元数超几何函数，$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 W 的特征值．当 $\Sigma = \sigma^2 I$ 时，W 的特征值的联合分布如下

$$\frac{2^{2mn}\pi^{2m^2-2m}}{\mathbb{Q}\Gamma_m(2m)\mathbb{Q}\Gamma_m(2n)|\sigma^2|^{2nm}}|D|^{2n-2m+1}\prod_{i<j}^{m}(\lambda_i-\lambda_j)^4\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big)(\mathrm{d}D). \tag{1}$$

定理 1　若 X 是 $m\times n$ 阶的四元数矩阵，秩为 $m\,(m\leqslant n)$，且 $f(X)$ 是关于 X 的函数，仅通过 XX^H 与 X 有关，则

$$\int_{XX^H=W} f(X)\mathrm{d}X = \frac{\pi^{2mn}}{\mathbb{Q}\Gamma_m(2n)}|W|^{2n-2m+1}f(W), \quad W = W^H > 0.$$

证明　由 $W = XX^H = V\Delta_W V^H$ (四元数矩阵的谱分解)，其中 $\Delta_W = \mathrm{diag}\,(w_1, \cdots, w_m)$，$w_1, \cdots, w_m$ 是 W 的特征值，V 是广义酉矩[9]，则由文献 [8] 中的推论 1，有

$$\mathrm{d}X = 2^{-m}\prod_{i=1}^{m}|W|^{2n-2m+1}(\mathrm{d}W)(V^H\mathrm{d}V)$$

及文献 [6] 中的定理 6，有

$$\int_{{}_qV_{m,n}} V^H\mathrm{d}V = \frac{2^m\pi^{2mn}}{\mathbb{Q}\Gamma_m(2n)},$$

进而，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{XX^H=W} f(X)\mathrm{d}X &= f(W)\int_{XX^H=W}\mathrm{d}X\\ &= f(W)|W|^{2n-2m+1}2^{-m}\int_{{}_qV_{m,n}} V^H\mathrm{d}V\\ &= \frac{\pi^{2mn}}{\mathbb{Q}\Gamma_m(2n)}|W|^{2n-2m+1}f(W).\end{aligned}$$

2　非奇异四元数 Wishart 矩阵在 MIMO 中的应用

一个 MIMO 信道系统可以用一个 $n_r\times n_t$ 的四元数随机矩阵 H 来表示，其中 n_t, n_r 分别是通信系统的输入、输出数．该通信系统如图 1 所示．

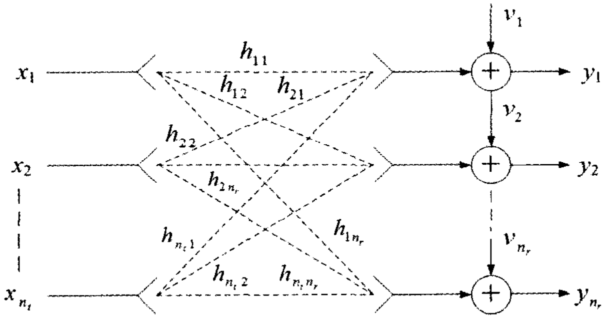

图 1:　四元数随机 MIMO 通信系统

第 j 个输出接受到的四元数信号可以写作

$$y_j = \sum_{i=1}^{n_t} h_{ij} x_i + v_j,$$

其中 h_{ij} 是第 i 个输入，第 j 个输出之间的四元数信道系数，x_i 是第 i 个输入的四元数信号，v_j 是服从四元数正态分布的干扰．输出端接收到的信号向量可以写作

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{n_t 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{1n_r} & \cdots & h_{n_t n_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n_r} \end{bmatrix}$$

或者用向量表示如下

$$y = Hx + v, \tag{2}$$

其中 $y, v \in \mathbb{Q}^{n_r \times 1}$，$H \in \mathbb{Q}^{n_r \times n_t}$，$x \in \mathbb{Q}^{n_t \times 1}$．输入总能量受限于 ρ，即为

$$E(x^H x) \leqslant \rho, \quad 或 \quad \operatorname{tr} E(xx^H) \leqslant \rho.$$

在这一部分中，我们将通过线性模型 (2)，求得四元数 MIMO 信道模型的信道容量。我们假定模型是块衰落模型，且在多个独立的衰落区间上编码，则由文献 [10]，我们可以得到随机 MIMO 信道的 Shannon 信道容量如下

$$C = E_H\Big[\log\det\Big(I_{n_t} + \frac{\rho}{n_t} H^H H\Big)\Big],$$

其中 $H \sim \mathbb{Q}N_{n_r \times n_t}(0, I_{n_r} \otimes \Sigma)$，$W = H^H H \sim \mathbb{Q}W_{n_t}(n_r, \Sigma)$．上式中的对数函数取自然对数时，信道容量是以 nats 为计量单位的；若对数函数取以 2 为底的，即 $\log_2$，则信道容量是以 bits 为计量单位的．本文中我们一律取自然对数．

定理 2 如果输入能量限制为 ρ，$H \sim \mathbb{Q}N_{n_r \times n_t}(0, I_{n_r} \otimes \Sigma)$，且 $n_r \geqslant n_t$，则信道容量为

$$\frac{2^{2n_r n_t}}{\mathbb{Q}\Gamma_{n_t}(2n_r)|\Sigma|^{2n_r}} \int_{W>0} |W|^{2n_r - 2n_t + 1} \log\det\Big(I_{n_t} + \frac{\rho}{n_t} W\Big) \exp\big(\operatorname{Retr}(-2\Sigma^{-1} W)\big) \mathrm{d}W,$$

其中 $W = H^H H$.

证明 通信容量为

$$C = \int_H \log\det\Big(I_{n_t} + \frac{\rho}{n_t} W\Big) f(H) \mathrm{d}H, \quad f(H) = \frac{2^{2n_r n_t}}{\pi^{2n_r n_t} |\Sigma|^{2n_r}} \exp\big(\operatorname{Retr}(-2\Sigma^{-1} H^H H)\big).$$

由定理 1 可知

$$\begin{aligned} C &= \frac{2^{2n_r n_t}}{\pi^{2n_r n_t} |\Sigma|^{2n_r}} \int_H \log\det\Big(I_{n_t} + \frac{\rho}{n_t} W\Big) \exp\big(\operatorname{Retr}(-2\Sigma^{-1} H^H H)\big) \mathrm{d}H \\ &= \frac{2^{2n_r n_t}}{\pi^{2n_r n_t} |\Sigma|^{2n_r}} \int_{W>0} \int_{H^H H = W} \log\det\Big(I_{n_t} + \frac{\rho}{n_t} W\Big) \exp\big(\operatorname{Retr}(-2\Sigma^{-1} H^H H)\big) \mathrm{d}H \mathrm{d}W \\ &= \frac{2^{2n_r n_t}}{\mathbb{Q}\Gamma_{n_t}(2n_r)|\Sigma|^{2n_r}} \int_{W>0} |W|^{2n_r - 2n_t + 1} \log\det\Big(I_{n_t} + \frac{\rho}{n_t} W\Big) \exp\big(\operatorname{Retr}(-2\Sigma^{-1} W)\big) \mathrm{d}W. \end{aligned}$$

由 (1) 式给出的特征值的联合密度，易得到下面的结果.

定理 3　如果输入能量限制为 ρ，$H \sim \mathbb{Q}N_{n_r\times n_t}(0, I_{n_r}\otimes\Sigma)$，且 $n_r \geqslant n_t$，则信道容量为

$$K\int_{D>0} {}_0F_0(-2\Sigma^{-1}, D)\prod_{i=1}^{n_t}\lambda_i^{2n_r-2n_t+1}\prod_{i<j}^{n_t}(\lambda_i-\lambda_j)^4\log\Big(\prod_{i=1}^{n_t}\Big(1+\frac{\rho}{n_t}\lambda_i\Big)\Big)\wedge_{k=1}^{n_t}\mathrm{d}\lambda_k,$$

其中

$$K=\frac{2^{2n_tn_r\pi^{2n_t^2-2n_t}}}{\mathbb{Q}\Gamma_{n_t}(2n_t)\mathbb{Q}\Gamma_{n_t}(2n_r)|\Sigma|^{2n_r}},$$

$\lambda_1>\cdots>\lambda_{n_t}>0$ 是 W 的特征值，$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n_t})$.

我们称 Σ 的下三角元素为信道的相关系数，若 Σ 的下三角元素是非零的，则称之为相关信道，反之，称之为不相关信道. 下面我们将举一个数字例子，为了计算方便，我们取 $n_r\times 2$ 的不相关信道，即 $\Sigma=\sigma^2I_2$. 我们可以得到 $n_r\times 2$ 的不相关信道容量如下

$$\begin{aligned}
C \;=\; & 2\frac{2^{4n_r}}{6\times(\sigma^2)^{4n_r}}\Big[\frac{(2\sigma^2)^{2n_r-2}}{\Gamma(2n_r)}\int_0^\infty\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\lambda_1\Big)\log\Big(1+\frac{\rho}{n_t}\lambda_1\Big)\lambda_1^{2n_r+1}\mathrm{d}\lambda_1\\
&+\frac{(2\sigma^2)^{2n_r+2}\Gamma(2n_r+2)}{\Gamma(2n_r)\Gamma(2n_r-2)}\int_0^\infty\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\lambda_1\Big)\log\Big(1+\frac{\rho}{n_t}\lambda_1\Big)\lambda_1^{2n_r-3}\mathrm{d}\lambda_1\\
&+\frac{6(2\sigma^2)^{2n_r}}{\Gamma(2n_r-2)}\int_0^\infty\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\lambda_1\Big)\log\Big(1+\frac{\rho}{n_t}\lambda_1\Big)\lambda_1^{2n_r-1}\mathrm{d}\lambda_1\\
&-\frac{4(2\sigma^2)^{2n_r-1}\Gamma(2n_r-1)}{\Gamma(2n_r)\Gamma(2n_r-2)}\int_0^\infty\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\lambda_1\Big)\log\Big(1+\frac{\rho}{n_t}\lambda_1\Big)\lambda_1^{2n_r}\mathrm{d}\lambda_1\\
&-\frac{4(2\sigma^2)^{2n_r+1}\Gamma(2n_r+1)}{\Gamma(2n_r)\Gamma(2n_r-2)}\int_0^\infty\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\lambda_1\Big)\log\Big(1+\frac{\rho}{n_t}\lambda_1\Big)\lambda_1^{2n_r-2}\mathrm{d}\lambda_1\Big].
\end{aligned}$$

计算结果如表 1 所示 (取 $\sigma^2=0.4$). 上述数据可以与文献 [11] 中的相关数据对比，我们可以发现该信道模型的容量远远大于同等条件下文献 [11] 中的复 Rayleigh 衰减信道容量.

表 1:　四元数随机信道容量 $H_{n_r\times n_t}(n_r\geqslant n_t)$

n_r	1 dB	5 dB	10 dB	15 dB	20 dB
2	2.1380×10^{5}	4.8343×10^{5}	6.3114×10^{5}	7.2384×10^{5}	7.9182×10^{5}
4	2.2721×10^{10}	4.5476×10^{10}	5.6613×10^{10}	6.3310×10^{10}	6.8115×10^{10}
6	1.8790×10^{15}	3.4835×10^{15}	4.2342×10^{15}	4.6807×10^{15}	4.9995×10^{15}
8	1.4231×10^{20}	2.5107×10^{20}	3.0085×10^{20}	3.3030×10^{20}	3.5130×10^{20}
10	1.0329×10^{25}	1.7590×10^{25}	2.0877×10^{25}	2.2815×10^{25}	2.4194×10^{25}
12	0.7314×10^{30}	1.2135×10^{30}	1.4295×10^{30}	1.5586×10^{30}	1.6473×10^{30}
14	0.5099×10^{35}	0.8286×10^{35}	0.9705×10^{35}	1.0540×10^{35}	1.1134×10^{35}

3　奇异四元数矩阵在 MIMO 中的应用

在这一部分中，我们考虑 $H\sim\mathbb{Q}N_{n_r\times n_t}(0, I_{n_r}\otimes\Sigma)$，$n_r<n_t$ 的情况，我们用到关于奇异四元数 Wishart 矩阵的非零特征值联合分布的定理[4]，以 $H\sim\mathbb{Q}N_{2\times4}(0, I_2\otimes\Sigma)$，$\Sigma=\sigma^2I_4$ 为例，部分计算结果如表 2 所示 (取 $\sigma^2=0.4$).

表 2: 四元数随机信道容量 $H_{n_r\times n_t}(n_r < n_t)$

n_r	1 dB	5 dB	10 dB	15 dB	20 dB
2	0.2821×10^{10}	0.5282×10^{10}	0.6433×10^{10}	0.7117×10^{10}	0.7606×10^{10}

参考文献:

[1] Robb J M. Aspects of Multivariate Statistical Theory[M]. New York: John Wiley & Sons, 1982

[2] Ratnarajah T, Vaillancourt R, Alvo M. Jacobians and hypergeometric functions in complex multivariate analysis[J]. Canadian Applied Mathematzes Quarterly, 2004, 12: 213-239

[3] Ratnarajah T, Vaillancourt R. Complex singular Wishart matrices and applications[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 20: 399-411

[4] Li F, Xue Y F. Singular quaternion normal and Wishart density function[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2010, 39: 3316-3331

[5] Teng C Y, Fan K T. Statistical analysis based on normal distribution of quaternion[J]. Contemporary Multivariate Analysis and its Application, 1997: 19-27

[6] 滕成业，李绍明. 四元数矩阵微分及其在精确分布上的应用[J]. 中山大学学报，1999, 38: 26-31
Teng C Y, Li S M. Exterior differential forms on quaternion matrices and its application[J]. Acta Scientiarum Naturnlium Universitatis Sunyatseni, 1999, 38: 26-31

[7] Li F, Xue Y F. The zonal polynomials and hypergeometric functions of quaternion matrix argument[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2009, 38(8): 1184-1206

[8] 李斐，施劲松，薛以锋. 四元数矩阵 M-P 逆变换的 Jacobi 行列式[J]. 华东理工大学学报，2008, 34(6): 921-923
Li F, Shi J S, Xue Y F. Jacobian of the M-P inverse transformation[J]. Journal of East China University of Science and Technology, 2008, 34(6): 921-923

[9] 李文亮. 四元数矩阵[M]. 北京：国防科技大学出版社，2002
Li W L. The Quaternion Matrix[M]. Beijing: The Press of National University Defense Technology, 2002

[10] Telatar I E. Capacity of multi-antenna Gaussian channels[J]. European Transactions on Telecommunications, 1999, 10: 585-595

[11] Ratnarajah T, Vaillancourt R, Alvo M. Complex random matrices and Rayleigh channel capacity[J]. Communications in Information and Systems, 2003, 20: 119-138

Quaternion Wishart Matrix and its Applications in the Capacity of Channel

LI Fei[1], XUE Yi-feng[2]

(1- Department of Mathematics, YanTai University, Yantai 264005;
2- Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241)

Abstract: The capacity of the quaternion MIMO channel model is computed by using the density function and the joint eigenvalue density function of the quaternion Wishart matrix. The model consists of the channel matrix $H_{n_r\times n_t}$ with $n_t \leqslant n_r$ and $n_t > n_r$. Some data are further computed for both kinds of matrices.

Keywords: quaternion MIMO channel; channel capacity; distribution function of quaternion Wishart matrix

Received: 26 May 2008. **Accepted:** 07 Sep 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10771069); the Shanghai Leading Academic Discipline Project (B407).